

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА ТРАПЕЦЕВИДНОМУ КОНТУРІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Підхід до оптимального проектування може бути різний, в залежності від використаних видів оптимізації. В даній задачі, є оптимізація форми (морфологічна оптимізація), та параметрична оптимізація оболонки мінімальної поверхні. Підбір матеріалів, для дослідження параметричної оптимізації оболонок мінімальних поверхонь, може бути не тільки зі сталі, можливо використовувати інші метали. Головне матеріали повинні бути ізотропними, а саме мати розрахунковий опір, в усіх напрямках однаковий.

Перевірка результатів оптимізаційного розрахунку, виконується згідно будівельних норм України. Після закінчення оптимізаційного розрахунку, є можливість, в розрахунковому комплексі Femap with Nastran, накладати результати по товщині оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, а далі виконувати всі міцнісні перевірки (розрахунок статички, стійкості, переміщення т.д.). Коли виконані всі перевірочні розрахунки, інженер-проектувальник самостійно регулює товщину оболонки мінімальної поверхні, з вихідними даними оптимізаційного розрахунку, і проектує кінцеву товщину просторової конструкції.

Дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості та ваги, з урахуванням геометричної нелінійності, відбувається, у програмному комплексі Femap with Nastran. За рахунок ітераційного завантаження та власного програмного забезпечення. Скінченні елементи plate – 912 шт. Вузлів 975 – штук. З'єднання з диском землі – жорстке заземлення. Матеріал сталь С275.

Зміна напружень по Мізесу відбулося від початкових від 99.9 МПа до 151.1 МПа, що не перевищує граничний опір сталі, який становить 240 МПа. Початкова товщина становила 60 мм, після дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації вона коливається від 10 мм до 68 мм, в залежності від зони завантаження.

Представлено графік цільових функцій коефіцієнта стійкості λ та ваги оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі. Відбулося зменшення ваги оболонки мінімальної поверхні на 21.55%, від початкового значення. Відбулося зниження коефіцієнта втрати стійкості на 2.46 рази, що дає досить ефективний результат.

Ключові слова: *стійкість оболонки, багатокритеріальна параметрична оптимізація, оболонка мінімальної поверхні, розрахунок стійкості оболонки, геометрична нелінійність, нелінійність, МСЕ, силові навантаження, статичні навантаження, метод скінченних елементів.*

Вступ. Підхід до оптимального проектування може бути різний, в залежності від використаних видів оптимізації. В даній задачі, є оптимізація форми (морфологічна оптимізація), та параметрична оптимізація оболонок мінімальної поверхні [1]. Для різних скінченних елементів, змінні проектування можуть відрізнятися за своєю природою, для стержневих скінченних елементів – площа поперечного перерізу, моменти інерції, радіуси інерції, та моменти опору. Для різних видів стержневих скінченних елементів – це може бути виключно площа поперечного перерізу, або формування верхніх, і нижніх поясів двотавра чи швелера, та інших фігур прокатної сталі [2]. Параметрична оптимізація допомагає, окремо задавати полки і стінки двотаврів – це дає можливість отримувати товщину стінки окремо, та полочки. Реалізація підходу відбувається, за рахунок пластиччастих скінчених елементів. Фактично товщина оболонок мінімальної поверхні, і є змінними проектування на трапецевидному контурі [3].

Підбір матеріалів, для дослідження параметричної оптимізації оболонок мінімальних поверхонь, може бути не тільки зі сталі, можливо використовувати інші метали (в будівництві іноді використовують алюміній). В інших видах промисловості, використання видів металів, можуть бути дуже різним. Головне матеріали повинні бути ізотропними, а саме мати розрахунковий опір, в усіх напрямках однаковий. Можна розглядати, для оболонок мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, не тільки сталь, а композитні матеріали, алюміній головне щоб вони буди ізотропними [4].

Щодо анізотропних матеріалів – ця частина оптимального проектування, фактично не вивчена. Зустрічаються частина робіт радянського періоду, де виконувалася оптимізація залізобетонних оболонок. Проблема анізотропних матеріалів, для просторових конструкцій, по типу оболонок мінімальних поверхонь – складна геометрична форма, що веде до складного напружено-деформованого стану. В різних зонах однієї конструкції, можуть виникати розтяг чи стиск, чи одночасно декілька видів робіт (наприклад стиск зі згином та крученням). Складається ситуація, коли розрахунковий опір, в різних напрямках матеріалу відрізняється, а складний напружено-деформований стан, унеможливує забезпечення міцнісних характеристик оболонки мінімальної поверхні, за двома групами граничних станів. Тому розрахунок анізотропними матеріалами, можливий тільки у двох випадках: підбір простої задачі, де працює тільки конструкції на розтяг чи стиск, або створення оптимізатора, де є можливість, в різних напрямках роботи просторової конструкції, підбирати різні обмеження і ліміти, для різного напружено-деформованого стану [5].

Цільові функції для параметричної оптимізації відштовхуються від цілі, до якої іде науковець, або проектувальник. Сама поширена цільова функція – це вага або об'єм просторової конструкції. Таким вирішенням питання просторових конструкцій, є оболонка мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, з оптимізаційним розрахунком, та врахуванням комбінації термосилового навантаження.

Стандартне бачення оптимального проектування, в зменшені ваги чи об'єму просторової конструкції, але більш широке дослідження в цьому напрямі, дає розуміння, про можливість зміни форми просторової конструкції, зміну матеріалу, зміну конструктивних особливостей просторової конструкції. Це призводить, до більш значного результату, чим економія на 10-20% ваги, від початкової задачі [6].

При зміні товщини оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, її товщина автоматизовано назначається, з урахуванням зміни власної ваги конструкції, в більшу чи в менше сторону. Взагалі зміна цільової функції, як правило «прийнято» в меншу сторону (мінімізація), але слід зазначити, що початкове призначення товщини оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі дуже важлива, так як важливо, з якої точки стартує оптимізаційний розрахунок. В цьому є особливість оптимізаційного розрахунку – він дає можливість «стартувати» з будь-якої точки спочатку, розрахунковий комплекс і оптимізатор автоматизовано доведе його до потрібної точки, якщо це буде враховано в області змінних проектування. На базі попереднього розрахунку можна виконувати наступні оптимізаційні розрахунки.

Для більш складних задач, оптимізаційні розрахунки можуть виконуватися декілька разів, це буде доцільно, коли об'єкти оптимізації унікальні, і немає можливості поставити попередні перерізи, з урахуванням досвіду дослідження даних об'єктів. Повторювальні оптимізаційні розрахунки, дають можливість зменшити значення цільової функції, але не набагато, інша справа, коли вага таких об'єктів сотні, чи тисячі тон сталі, а це може в абсолютному значенні бути досить суттєво.

Головне в оптимізаційному розрахунку його автоматизованість, і не важливо з якої точки ми починаємо, коли перший оптимізаційний розрахунок завершився, є можливість зробити ще декілька разів [7].

Перевірка результатів оптимізаційного розрахунку, виконується згідно будівельних норм України. Після закінчення оптимізаційного розрахунку, є можливість, в розрахунковому комплексі Femap with Nastran, накладати результати по товщині оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, а далі виконувати всі міцнісні перевірки (розрахунок статика, стійкості, переміщення т.д.). Коли виконані всі перевірочні розрахунки, інженер-проектувальник самостійно регулює товщину оболонки мінімальної поверхні, з вихідними даними оптимізаційного розрахунку, і проектує кінцеву товщину просторової конструкції.

Оптимізаційне проектування, дає можливість вирішувати наукові і практичні задачі, за допомогою сучасного оптимізатора і розрахункового комплексу Femap with Nastran. Можливість працювати з різними матеріалами, та видами розрахунку, головне, щоб виконувалися всі міцнісні показники, перевірочні розрахунки, та враховувалися властивості конструкційних матеріалів [8].

Математичне програмування параметричної оптимізації оболонок мінімальних поверхонь. Під параметричною оптимізацією розуміється процес досягнення екстремальної цілі у припущенні стаціонарності екстремальної характеристики об'єкта оптимізації в площині оболонок мінімальної поверхні, що обмежена її геометрією вхідними і вихідними параметрами. При цьому об'єкт оптимізації може реально існувати, або представляти собою математичну модель. Методи і алгоритми параметричної оптимізації мають важливу роль, в загальному математичному методі, при розрахунку конструкції. З іншої сторони, сам об'єкт оптимізації, можна розглядати, як об'єкт статичного оптимального керування, з постійними вхідними і вихідними даними [9].

Об'єкти оптимізації, які розглядаються (оболонки мінімальних поверхонь), будуть характеризуватися сукупністю неперервних параметрів, які умовно можна розділити на три групи: вхідні (керовані), зовнішні, вихідні.

Вхідними параметрами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називаються змінними, в процесі оптимізації, параметри, які мають роль керуючої дії, при розгляді об'єкту оптимізації. Зовнішні параметри $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ характеризують невизначеність обставин. Окремі компоненти вектора ξ , можуть мати випадковий, так і не випадковий характер. Змістовний смисл введення зовнішніх параметрів складається в описі наступних характерних чинників:

- вплив випадкових відхилень при установці заданих (номінальних) значень x_i на реальному об'єкті;
- випадкових чинників зовнішньої середовища на об'єкт, які змінюють реальні вихідні характеристики по відношенню до розрахункових;
- вплив змінних, умови функціонування об'єкту, наприклад таких, як температура, вологість, рівень радіації, сейсміка.

Вектор вихідних параметрів $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, дозволяє кількісно визначити характеристики оптимізованого об'єкту. Вектор y характеризує оптимізований об'єкт. Далі передбачається, що існує функціональний зв'язок [10]:

$$y = \varphi(x, \xi). \tag{1}$$

Оператор об'єкта оптимізації дозволяє по заданим x і ξ розрахувати відповідний вектор y (задача аналізу). Як правило, оператор об'єкту оптимізації φ задано алгоритмічно.

Задача параметричної оптимізації в загальному випадку виконується як багатокритеріальна задача з обмеженнями:

$$y_i = (x, \xi) \rightarrow \min i \in [1; r], x \in D \cong R^n. \tag{2}$$

$$D = \{x \in R^n \mid g_i(x, \xi) \leq 0, i \in [1: m], g_i(x, \xi) = 0, j \in [m + 1: S]\}. \tag{3}$$

Множина $\{y_1 \dots y_k\}$ утворює множину вихідних параметрів, які мають вагу часткових критерій оптимальності і характеризують об'єкт оптимізації. Наявність декількох часткових критерій, по суті відображають ту невизначеність цілі, яка явно або неявно присутня при оптимізації будь-якого складного об'єкту.

Інтуїтивна суть задачі полягає у виборі такого вектора із допустимої множини D , щоб кожен із критеріальних вихідних параметрів прийняв по можливості менше значення. Математичне рішення задачі оптимізації у вигляді конкретного вектора $x^* \in D$ практично не існує, так як критеріальні вихідні параметри конфліктують за рахунок суперечливих вимог до об'єкту оптимізації, і мінімум відповідних функціоналів досягається в різних точках. Це припущення правомірне, так як в іншому випадку, дві вихідні функції у мають мінімуми в одній точці, тоді одна з них може не розглядатися взагалі [11].

Допустима множина D формується на основі трьох груп різних обмежень, які мають вигляд рівності або нерівності і задаються вони за рахунок функцій $g_i(x, \xi)$.

Прямі або аргументні обмеження накладаються безпосередньо на компоненти вектора вхідних параметрів:

$$a_i(x_j) \leq x_i \leq b_i(x_j); i \neq j. \tag{4}$$

Обмеження (3) і (4) зустрічаються частіше всього і визначені причинами, які пов'язані з умовами фізичною необхідністю вхідних параметрів. Функціональні обмеження включають умови роботоспроможності, які мають принципове значення при оцінці правильного функціонування об'єкта оптимізації, виходячи із його функціонального призначення. Ці обмеження мають наступний вид [12].

$$y_i \leq t_i; t_i \in R^1; i \in [1:L]. \quad (5)$$

До функціональних обмежень відноситься вимоги по міцності і стійкості системи, яка проектується за допомогою автоматизованої оптимізації – полягає у необхідності розміщення полюсів передаточної функції в комплексній площині. Критеріальні обмеження мають наступний вигляд

$$y_l \leq t_l; t_l \in R^1; l \in [1:K]. \quad (6)$$

і відображають вимоги до характеристик якості об'єкта оптимізації, які повинні бути виконані за будь-яких умов оптимізаційного проекту з використання функціональних обмежень.

Основна відмінність від функціональних і критеріальних обмежень полягає в наступному: виконання нерівності (5) з великим запасом не вимагається, важливо тільки гарантувати її виконання. З іншої сторони в силу критеріального характеру вихідних параметрів у в (6) необхідно досягати максимально можливого результату з урахуванням декількох екстремумів цільової функції параметричної оптимізації оболонок мінімальних поверхонь при виконанні певних нерівностей [13].

Чисельне дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, з урахуванням геометричної нелінійності. Дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості та ваги, з урахуванням геометричної нелінійності, відбувається, у програмному комплексі Femap with Nastran. За рахунок ітераційного завантаження та власного програмного забезпечення. На рис. 1 зображена скінчено-елементна модель. Скінченні елементи **plate** – 912 шт. Вузлів 975 – штук. З'єднання з диском землі – жорстке защемлення. Матеріал сталь С275. Товщина оболонки 60 мм.

Після дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні отримаємо результати форм та частот втрат стійкості на рис. 2-11. Частоти коливаються від 1.010239 Hz до 2.248363 Hz. Перша частота втрати оптимізованої стійкості має значення 1.010239 Hz. Це означає відсутності будь-якого запасу стійкості, крім того, який закладений в комбінацію зовнішнього навантаження за відповідними нормативними документами.

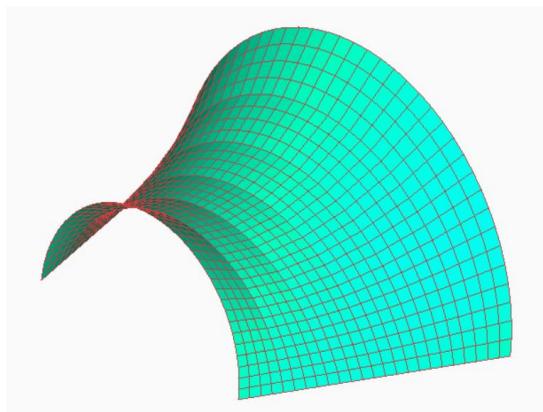


Рис. 1. Скінчено-елементна модель

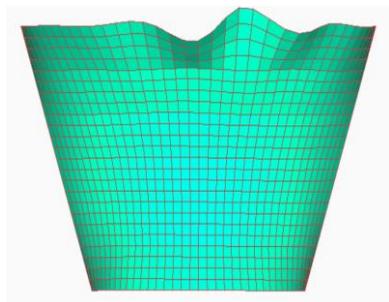


Рис. 2. Перша форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 1 1.010239

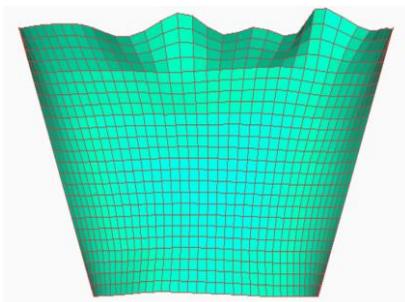


Рис. 7. Шоста форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 6 1.69568

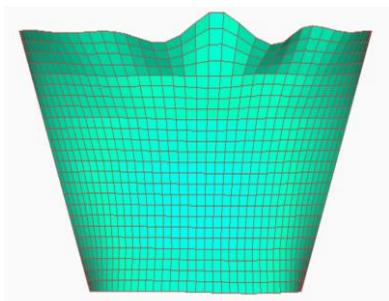


Рис. 3. Друга форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 2 1.013581

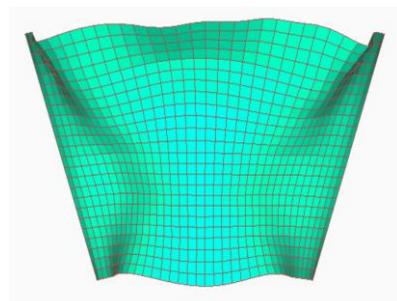


Рис. 8. Сьома форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 7 1.919744

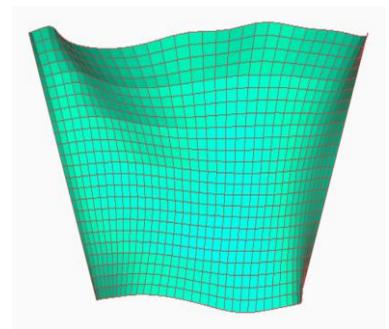


Рис. 4. Третя форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 3 1.165707

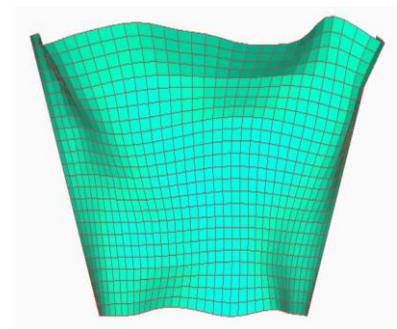


Рис. 9. Восьма форма втрата стійкості.
Опт. Eigenvalue 8 2.047753

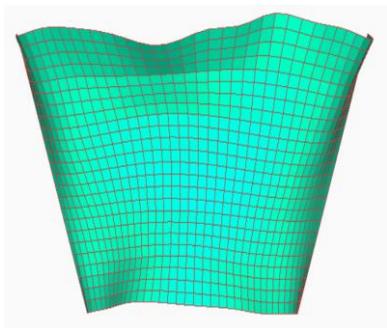


Рис. 5. Четверта форма втрати стійкості. Опт. Eigenvalue 4 1.400628

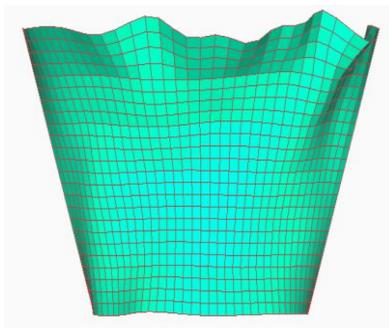


Рис. 10. Дев'ята форма втрати стійкості. Опт. Eigenvalue 9 2.163945

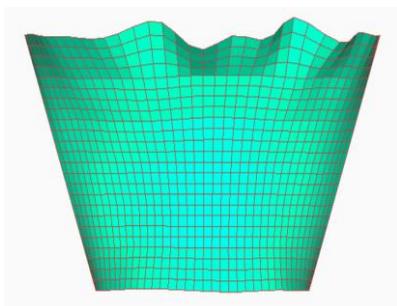


Рис. 6. П'ята форма втрати стійкості. Опт. Eigenvalue 5 1.667027

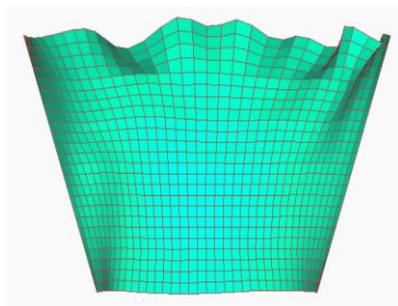


Рис. 11. Десьта форма втрати стійкості. Опт. Eigenvalue 10 2.248363

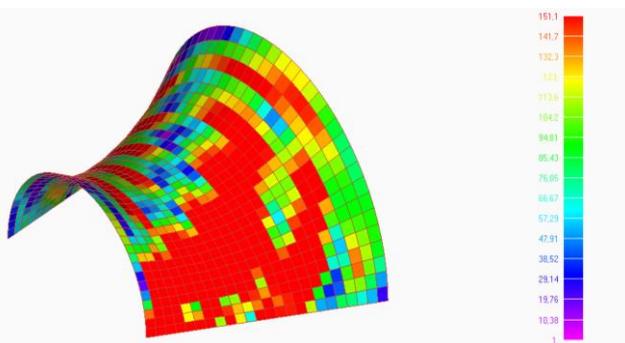


Рис. 12. Напруження по Мізесу при дослідження стійкості з урахуванням геометричної нелінійності від 151.1 до 0.1 МПа

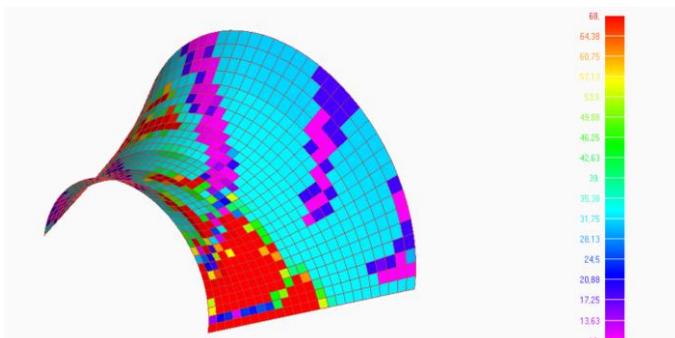


Рис. 13. Товщина оболонки мінімальної поверхні при дослідженні багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості з урахуванням геометричної нелінійності від 68.0 до 10 мм

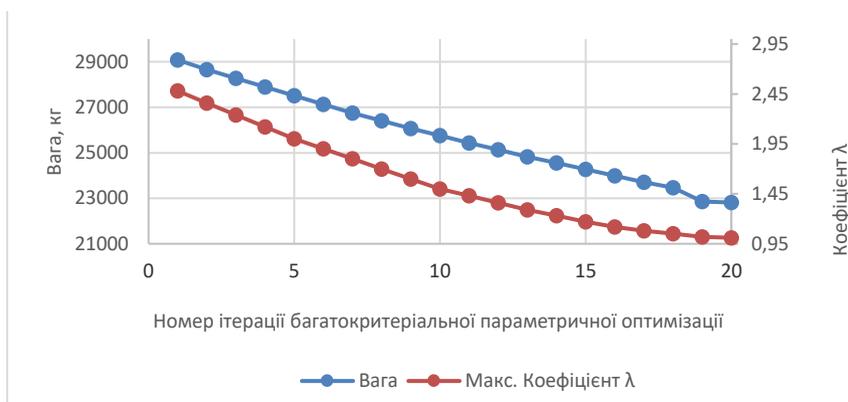


Рис. 14. Графік зміни цільових ункцій ваги і коефіцієнта λ

Результати чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі, з урахуванням геометричної нелінійності.

Зміна напружень по Мізесу відбулося від початкових від 99.9 МПа до 151.1 МПа, на рис. 12, що не перевищує граничний опір сталі, який становить 240 МПа. Початкова товщина становила 60 мм, після дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації вона коливається від 10 мм до 68 мм, на рис. 13, в залежності від зони завантаження.

На рис. 14 показано графік цільових функцій коефіцієнта стійкості λ та ваги оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі. Відбулося зменшення ваги оболонки мінімальної поверхні на 21.55%, від початкового значення. Відбулося зниження коефіцієнта втрати стійкості на 2.46 рази, що дає досить ефективний результат.

Дослідження виконувалося, з урахуванням геометричної нелінійності, на деформованій формі оболонки мінімальної поверхні. Такий підхід, до оптимального проектування, дає можливість досягнути додаткову оптимізації виходячи, з даних механічних процесів та розрахункової схеми. Лінійна та нелінійна постановка даного виду задачі відрізняється до 10%.

Головний пріоритетом такого підходу, є застосування двох видів оптимізації на одному досліджуваному об'єкті, що в наявній науковій літературі фактично не використовується, а дана методика будівельної і прикладної механіки показує свою високу ефективність. Виконання даного виду розрахунку, повністю в оптимізованому режимі, дає можливість зробити цей процес комфортним і зручним для користувача.

Нелінійність програмного забезпечення дає можливість пришвидшувати оптимізаційні розрахунки та роботи їх з високою точністю. Створене програмне забезпечення автором самостійно.

Список літератури:

1. Герасимов Е.Н., Почтман Ю.М., Скалозуб В.В. Многокритериальная оптимизация конструкций. Донецк: Вища шк. Главное Изд-во. Киев, 1985. 134 с.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
3. Ігнатишин М.І. Механіко-математичне моделювання елементів мостових конструкцій (опора, балка, плита): монографія. Мукачево: РВВ МДУ, 2017. 172 с.
4. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2022. Вип. 109. С. 50-65. DOI: 10.32347/2410-2547.2022.109.50-65
5. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельне дослідження параметричної оптимізації вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі при термосиловому навантаженні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2023. Вип. 110. С. 430-446. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.110.430-446
6. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Жупаненко І.В. Оптимальне проектування вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, яка складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні. *Шляхи підвищення ефективності будівництва в умовах формування ринкових відносин*. 2023. № 51. С. 218-233. [https://doi.org/10.32347/2707-501x.2023.51\(1\).218-233](https://doi.org/10.32347/2707-501x.2023.51(1).218-233)
7. Yurchenko V.V., Peleshko I.D. Searching for a compromise solution in crosssection size optimization problems of cold-formed steel structural members. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2022. Вип. 109. С. 72-92. DOI: 10.32347/2410-2547.2022.109.72-92
8. Іванченко Г., Кошевий О. Чисельне дослідження стійкості оболонки мінімальної поверхні на круглому плані з урахуванням геометричної нелінійності при термосиловому навантаженні. *Шляхи підвищення ефективності будівництва*, 2024, 53(1), 39–48. [https://doi.org/10.32347/2707-501x.2024.53\(1\).39-48](https://doi.org/10.32347/2707-501x.2024.53(1).39-48).
9. Кошевий О.О. Чисельне дослідження стійкості оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. *Прикладна геометрія і інженерна графіка*. 2024. №106. С. 133-147. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.106.133-147>
10. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Затилюк Г.А. Багатокритеріальна параметрична оптимізація переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому

навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2024. Вип. 112. С. 209-221. DOI: 10.32347/2410-2547.2024.112.209-221

11. Yurchenko V.V., Peleshko I.D. Parametric optimization of steel lattice portal frame with chs structural members. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2021. Вип. 107. С. 45-74. DOI: 10.32347/2410-2547.2021.107.45-74

12. Perelmuter A.V., Yurchenko V.V., Peleshko I.D. optimization of cross-sectional dimensions for coldformed steel lipped channel columns. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2022. Вип. 108. С. 156-170. DOI: 10.32347/2410-2547.2022.108.156-170

13. Yurchenko V.V., Peleshko I.D. Parametric optimization of steel structures based on gradient projection method. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2020. Вип. 105. С. 192-220. DOI: 10.32347/2410-2547.2020.105.192-220

Oleksand KOSHEVIY

Multicriteria parametric optimization of the stability of the minimum surface shell on a trapezoidal contour taking into account geometric nonlinearity under thermo-stress loading

The approach to optimal design may vary depending on the types of optimization used. In this task, there is shape optimization (morphological optimization) and parametric optimization of the minimum surface shell. The selection of materials for studying the parametric optimization of minimum surface shells may not be limited to steel; other metals may also be used. The main thing is that the materials must be isotropic, i.e., have the same calculated resistance in all directions.

Verification of optimization calculation results is performed in accordance with Ukrainian building codes. After completing the optimization calculation, it is possible to superimpose the results on the thickness of the minimum surface shell on a trapezoidal contour in the Femap with Nastran calculation complex, and then perform all strength checks (calculation of statics, stability, displacement, etc.). When all verification calculations have been performed, the design engineer independently adjusts the thickness of the minimum surface shell using the initial data from the optimization calculation and designs the final thickness of the spatial structure.

Research into multi-criteria parametric optimization of stability and weight, taking into account geometric nonlinearity, is carried out using the Femap with Nastran software package. This is achieved through iterative loading and proprietary software. Finite elements: 912 plates. Nodes: 975. Connection to the ground disc – rigid clamping. Material: C275 steel.

The change in stresses according to Mises occurred from the initial 99.9 MPa to 151.1 MPa, shown in Fig. 1.12, which does not exceed the ultimate strength of steel, which is 240 MPa. The initial thickness was 60 mm, after studying multi-criteria parametric optimization, it ranges from 10 mm to 68 mm, as shown in Fig. 1.13, depending on the load zone.

Fig. 1.14 shows a graph of the objective functions of the stability coefficient λ and the weight of the minimum surface shell on a trapezoidal contour. The weight of the minimum surface shell decreased by 21.55% from the initial value. The stability loss coefficient decreased by 2.46 times, which is a fairly effective result.

Keywords: *shell stability, multi-criteria parametric optimization, minimal surface shell, shell stability calculation, geometric nonlinearity, nonlinearity, MCE, force loads, static loads, finite element method.*

Дата надходження статті: 06.01.2026

Дата прийняття статті: 02.02.2026